MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 13
27.1.2020

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

1. Im $\mathbb{R}^2$ seien die beiden Quadriken Q_1, Q_2 durch die Gleichungen

$$Q_1 : \quad x^2 + 2xy + 6y^2 + 2x = -1, \qquad Q_2 : \quad 5x^2 - 10xy + 6y^2 = 1$$

gegeben.

   a) Zeigen Sie durch quadratische Ergänzung, daß Q_1, Q_2 im $\mathbb{R}^2$ die gleiche affine Normalform $Q' = \{\binom{w}{z} \mid w^2 + z^2 = 1\}$ besitzen und bestimmen Sie Affinitäten

$$g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad g_1(Q_1) = Q' \quad \text{und} \quad g_2(Q_2) = Q'.$$

   b) Geben Sie eine Affinität $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ an mit $h(Q_1) = Q_2$.

2. Bestimmen Sie mittels quadratischer Ergänzung in Abhängigkeit des reellen Parameters r die affine Normalform der durch

$$(1 + r)x^2 + ry^2 - 2rxy + y - x = 0$$

gegebenen Quadrik Q.

3. Betrachten Sie die von zwei reellen Parametern λ, $\mu \in \mathbb{R}$ abhängige 3×3–Matrix

$$A(\lambda, \mu) := \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -4 \\ 1 & \lambda & \mu \\ \mu & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Zeigen Sie, daß die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid A(\lambda, \mu) \text{ ist nicht invertierbar.} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

ein Kegelschnitt in $\mathbb{R}^2$ ist. Bestimmen Sie den Typ dieses Kegelschnitts und folgern Sie, daß es ein $R > 0$ gibt, so daß $A(\lambda, \mu)$ für alle $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $\lambda^2 + \mu^2 \geq R^2$ invertierbar ist.

4. Bestimmen Sie in Abhängigkeit des reellen Parameters t den Typ der durch die folgende Gleichung gegebenen Quadrik im $\mathbb{R}^2$

$$(1 + 4t)y^2 + x^2 + 2xy + 2tx - (8t^2 - 2t)y = -4t^3 + 1 - t^2.$$

Für die Tutorien vom 27.1. und 29.1.20